TEMA 3. Autovalores

Física Computacional I

Carolina Mendoza

Escuela Politécnica Superior
Universidad Nebrija

TEMA 3. Autovalores

Problema de autovalores

- En Física, los autovalores y autovectores aparecen en muchos contextos, como la mecánica cuántica, la vibración de sistemas y el análisis de estabilidad.
- Un autovalor λ y un autovector $\vec{v}$ de una matriz cuadrada A satisfacen:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

- Permiten caracterizar propiedades fundamentales de sistemas físicos y matemáticos.

UNIVERSIDAD NEBRIJA

Definición

Sean A una matriz $n \times n$ y $\vec{v}$ un vector no nulo. Si existe un escalar λ tal que:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

entonces λ es un **autovalor** de A y $\vec{v}$ es un **autovector** asociado.

Forman una pareja de autovalor y autovector si $v \neq 0$

λ es un autovalor de A si y solo si la matriz $A - \lambda I$ es una matriz singular, es decir:

$$p(\lambda) \quad = \quad det(A\vec{v} - \lambda\vec{v}) = 0$$

- Para encontrar los autovalores de A, resolvemos la ecuación característica:
$$\det(A - \lambda I) = 0$$
- Esto genera un polinomio de grado n, llamado **polinomio característico**.
- Sus raíces son los autovalores de A.

Ejemplo: Cálculo de Autovalores

Consideremos la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calculamos el determinante:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda I\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^2 - (-1)^2 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1$$

- Los autovalores son ceros del polinomio característico.

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

- No hay métodos directos si $n > 5$
- Solo se calculan por redondeo o despreciando términos.

- Sea A una matriz cuadrada $A \in \mathbb{M}^{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalizable y sus autovalores verifican:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

- Una matriz diagonalizable garantiza la existencia de una base de autovectores $(\vec{v_i})$ asociados a los autovalores (λ_i) anteriores:

$$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} \text{ con } A\vec{v_i} = \lambda_i \vec{v_i}$$

- Todo vector de $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como una combinación lineal de una base $c_i \in \mathbb{R}$:

$$\vec{u}^{\,0} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + \ldots + c_n\vec{v_n}$$

- Al multiplicar por la matriz A se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{u}^{\,1} &= A\vec{u}^{\,0} = c_1 A\vec{v_1} + c_2 A\vec{v_2} + \ldots + c_n A\vec{v_n} \\ &= c_1\lambda_1\vec{v_1} + c_2\lambda_2\vec{v_2} + \ldots + c_n\lambda_n\vec{v_n} \end{aligned}$$

- Repetimos el proceso multiplicando nuevamente por la matriz A k veces

$$\begin{aligned}
\vec{u}^{\,2} &= A\vec{u}^{\,1} = c_1 A^2 \vec{v_1} + c_2 A^2 \vec{v_2} + \ldots + c_n A^2 \vec{v_n} \\
&= c_1 \lambda_1^2 \vec{v_1} + c_2 \lambda_2^2 \vec{v_2} + \ldots + c_n \lambda_n^2 \vec{v_n} \\
\vdots &= \vdots \\
\vec{u}^{\,k} &= A^k \vec{u}^{\,0} = c_1 \lambda_1^k \vec{v_1} + c_2 \lambda_2^k \vec{v_2} + \ldots + c_n \lambda_n^k \vec{v_n}
\end{aligned}$$

- Como λ_1 es el autovalor de módulo mayor, podemos factorizar:

$$\vec{u}^{\,k} = A^k \vec{u}^{\,0} = \lambda_1^k \left(c_1 \vec{v}_1 + c_2 \frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k} \vec{v}_2 + \ldots + c_n \frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k} \vec{v}_n \right)$$

- Como $|\lambda_1| > |\lambda_i|$, se verifica que:

$$\lim_{k \to \infty} A^k \vec{u}^{\,0} = \lambda_1^k c_1 \vec{v}_1$$

- Una buena aproximación del autovalor $\vec{v}_1$ para grandes valores de k es:

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}^{\,k}}{||\vec{u}^{\,k}||} = \frac{A^k \vec{u}^{\,0}}{||A^k \vec{u}^{\,0}||}$$

- El autovalor dominante λ_1 se determina utilizando iteraciones sucesivas.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\vec{u}_j^{\,k+1}}{\vec{u}_j^{\,k}} = \frac{\lambda_1^{k+1}\left(c_1\vec{v_1}_j + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k+1}\vec{v_2}_j + \ldots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k+1}\vec{v_n}_j\right)}{\lambda_1^{k}\left(c_1\vec{v_1}_j + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k}\vec{v_2}_j + \ldots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k}\vec{v_n}_j\right)} = \lambda_1$$

donde j es una componente no nula del vector $\vec{u}_k$

Solo determina el autovalor λ_1 cuya magnitud es la mayor de todas

- Dado un vector u_0 inicial
- Generamos un nuevo vector

$$\vec{u}^{\,k+1} = \frac{A\vec{u}^{\,k}}{||A\vec{u}^{\,k}||}$$

El autovalor se determina como:

$$\lambda_1 \sim \frac{\vec{u}_j^{\,k+1}}{\vec{u}_j^{\,k}}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} \qquad u = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Solución:

$u = [-0.23570226 \;\; 0.23570226 \;\; 0.94280904]$

$\lambda = 3.000000000145335$

Determinar el máximo autovalor de las siguientes matrices:

1

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad u = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

2

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \qquad u = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Qué se puede concluir?

TEMA 3. Autovalores

Solución de ejercicio

```
0 [0. 1.] 3.0
1 [0. 1.] 3.0
Autovalor dominante: 3.0
Autovector correspondiente: [0. 1.]
```

```
17 [1.7207832e-09 1.0000000e+00] -3.000000001720783
18 [-5.73594398e-10 -1.00000000e+00] -3.000000000573594 5
19 [1.91198133e-10 1.00000000e+00] -3.000000000191198
20 [-6.37327109e-11 -1.00000000e+00] -3.000000000637326
21 [2.1244237e-11 1.0000000e+00] -3.000000000212443
Autovalor dominante: -3.000000000637326
Autovector correspondiente: [-6.37327109e-11 -1.00000000e+00
```

El primer ejercicio converge rápidamente y en el segundo se ve que el autovector oscila entre 1 y -1 aunque el autovalor converge.

Matriz Simétrica Definida Positiva (Siempre Diagonalizable)
Propiedades:

- Diagonalizable, con autovalores reales y positivos.
- Buena estabilidad numérica.

```
n = 10  # Tamaño de la matriz
A = np.random.rand(n, n)
A = 0.5 * (A + A.T) + n * np.eye(n)
```

Matriz de Toeplitz (Diagonalizable, pero con Convergencia Variable)

Propiedades:

- Diagonalizable, pero puede tener autovalores cercanos.
- Convergencia depende de la distribución espectral.

```
from scipy.linalg import toeplitz
n = 10  # Tamaño de la matriz
columna = np.array([2] + [-1] * (n - 1)) #Primera columna
A = toeplitz(columna)  # Crear matriz de Toeplitz
```

Matriz de Hilbert (Muy Mal Condicionada)

Propiedades:

- Diagonalizable, pero extremadamente mal condicionada.
- Autovalores decrecen rápidamente, causando inestabilidad numérica.

```
from scipy.linalg import hilbert
n = 10  # Tamaño de la matriz
A = hilbert(n)
```

Matrices No Diagonalizables

Matriz de Jordan (No Diagonalizable) Propiedades:

- No es diagonalizable porque no tiene base completa de autovectores.
- El método de la potencia no convergerá correctamente.

```
n = 10  # Tamaño de la matriz
A = np.zeros((n, n))
for i in range(n-1):
    A[i, i] = 5  # Autovalor 5 en la diagonal
    A[i, i+1] = 1  # Elementos en la subdiagonal
A[n-1, n-1] = 5  # Último elemento de la diagonal
```

Matriz Aleatoria Grande (Evaluar Escalabilidad) Propiedades:

- Se genera aleatoriamente, en general es diagonalizable.
- Permite evaluar el tiempo de convergencia en matrices grandes.

```
n = 20  # Tamaño de la matriz
A = np.random.rand(n, n)
A = 0.5 * (A + A.T)
#Hacerla simétrica para asegurar diagonalización
```